# 高中与大学数学衔接学习参考资料

“学海筑基”专题讲座配套学习材料

供新生课后学习与复习参考

合肥大学大学生数学协会

本资料由合肥大学大学生数学协会整理，作为“学海筑基”专题讲座的配套学习材料，主要面向新生开展高中至大学数学学习衔接指导。资料内容侧重基础知识梳理、学习方法提示与典型例题分析，供同学们课后学习与参考使用。

本资料为学习参考材料，旨在帮助同学们建立大学数学学习框架；其中部分内容属于拓展梳理，不完全对应现场讲授顺序。

合肥大学大学生数学协会

2026 年 10 月

# 目录

1 编写说明 1

2 模块一基本初等函数与求导公式 1

3 模块二代数运算 3

4 模块三不等式 4

5 模块四逻辑与命题基础 6

6 模块五数学符号的识读和书写 7

7 模块六严谨的数学表达 8

8 模块七思维方式的转变 9

9 模块八补充基础知识 10

10 结语 12

# 1 编写说明

为帮助新生顺利完成从高中数学到大学数学的学习过渡，大学生数学协会结合“学海筑基”专题讲座内容，整理形成本参考资料。全文围绕大学数学学习中较为关键的八个方面展开，包括：基本初等函数与求导、极限中的代数运算、不等式、逻辑与命题基础、数学符号识读、严谨表达、思维方式转变以及相关基础拓展内容。

在使用本资料时，建议同学们注意以下几点：

1. 以概念理解为基础，不要仅停留在公式记忆层面；
2. 例题重在理解方法，练习部分应独立完成；
3. 对于本资料中的证明性内容，应重点体会逻辑链条与表述规范；
4. 如遇到尚未系统学习的内容，可先把握思想框架，再在课程推进中逐步深化。

# 2 模块一基本初等函数与求导公式

## 2.1 学习提示

导数是大学数学中的核心工具之一。要真正掌握导数，既要熟记常见函数的求导公式，也要理解复合、乘积、商以及反函数求导中所体现的结构关系。学习中应特别重视链式法则和乘积求导法则，因为它们在后续计算中出现频率很高。

## 2.2 基础内容

- **常见求导公式**
  - 幂函数：$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$；
  - 指数函数：$(e^x)' = e^x$，$(a^x)' = a^x \ln a$；
  - 对数函数：$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$；
  - 三角函数：$(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(\tan x)' = \sec^2 x$；
  - 反三角函数：$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$。
- **常用求导法则**
  - 和差求导法则；
  - 乘积求导法则：$(uv)' = u'v + uv'$；
  - 商求导法则：$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$；

- 链式法则：若 $y = f(u), u = g(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$。

· **学习提醒**

- 分部积分法中常见的“反对幂三指”排序，可作为选择 $u$ 与 $dv$ 的经验参考；
- 熟记公式后要通过足量练习巩固，做到“见结构、能分类、会下手”。

## 2.3 例题分析

求下列函数的导数：

1. $y = \ln(\sin x)$；
2. $y = x^2 e^{2x}$；
3. $y = \arctan(2x + 1)$。

**解题要点：**

· 对于 $y = \ln(\sin x)$，外层函数为对数函数，内层函数为三角函数，应用链式法则可得

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x.$$

· 对于 $y = x^2 e^{2x}$，应使用乘积求导，并注意指数部分也包含复合结构，因此

$$y' = 2xe^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x} = (2x + 2x^2)e^{2x}.$$

· 对于 $y = \arctan(2x + 1)$，由链式法则可得

$$y' = \frac{1}{1 + (2x + 1)^2} \cdot 2.$$

## 2.4 练习建议

求函数 $y = \cos(x^2)$ 与 $y = \dfrac{\ln x}{x}$ 的导数，并比较它们分别属于哪一类求导结构。

# 3 模块二代数运算

## 3.1 学习提示

在极限计算中，许多看似复杂的问题，实质上首先考查的是代数变形能力。当直接代入出现 $\frac{0}{0}$ 型或其他未定式时，往往需要借助通分、因式分解、有理化以及公式展开等方法，为后续求极限创造条件。

## 3.2 基础内容

- **因式分解**：提取公因式，平方差公式、立方和差公式、十字相乘等；
- **通分运算**：处理分式加减时，应优先寻找最简公分母；
- **分式除法**：除以一个分式等于乘以它的倒数；
- **分子有理化**：当分子或分母中出现根式差时，可利用共轭式消去根号；
- **二项式定理**：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k,$$

常用于高次式展开与近似分析。

## 3.3 例题分析

求极限：

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$；
2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$；
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$（其中 $n$ 为正整数）。

**解题要点：**

- 第 1 题直接代入得 $\frac{0}{0}$ 型。使用有理化：

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}+2},$$

因而极限值为 $\frac{1}{4}$。

· 第 2 题先通分：

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1},$$

进而可得极限值为 $\frac{1}{2}$。

· 第 3 题用二项式展开：

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots,$$

除以 $x$ 后令 $x\to 0$，可得极限值为 $n$。

### 3.4 练习建议

求：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$。

重点思考：每道题的“第一步变形”应是什么。

## 4 模块三不等式

### 4.1 学习提示

不等式在微积分中具有重要的工具性作用。无论是极限估计、单调性分析，还是证明题中的放缩与比较，都会频繁用到基本不等式、指数对数不等式及三角不等式。

### 4.2 基础内容

· **基本不等式**：当 $a,b>0$ 时，

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时取等号；

· **常用等价形式**：$a^2+b^2\geq 2ab$，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$；

- **指数与对数不等式**:
  - $e^x \geq 1 + x$;
  - 当 $x > -1$ 时，$\ln(1 + x) \leq x$;
- **三角不等式**：当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x < \tan x$。

## 4.3 例题分析

证明：当 $x > 0$ 时，$\ln(1 + x) < x$。

**证明思路：**构造函数

$$f(x) = \ln(1 + x) - x.$$

则

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x} < 0 \quad (x > 0).$$

因此，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。又因为 $f(0) = 0$，故当 $x > 0$ 时，

$$f(x) < f(0) = 0,$$

从而得到

$$\ln(1 + x) < x.$$

该题体现了不等式证明的常见思路：**移项构造函数 $\rightarrow$ 求导判定单调性 $\rightarrow$ 结合端点值得出结论**。

## 4.4 练习建议

证明：当 $x > 0$ 时，

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

可尝试构造函数

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

并分析其导数性质。

# 5 模块四逻辑与命题基础

## 5.1 学习提示

大学数学中的定义、定理与证明高度依赖逻辑语言。读懂“任意”“存在”“充分条件”“必要条件”等概念，是理解极限、连续、可导等正式定义的前提。

## 5.2 基础内容

- **充分条件与必要条件**：若 $p \Rightarrow q$，则 $p$ 是 $q$ 的充分条件，$q$ 是 $p$ 的必要条件；
- **全称量词与存在量词**：
  - $\forall$ 表示“任意”或“所有”；
  - $\exists$ 表示“存在”；
- **量词否定**：
  - $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$；
  - $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$；
- **极限的 $\varepsilon$-$\delta$ 定义**：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时，有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

## 5.3 例题分析

写出“函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上无界”的定义。

**分析：**

函数在区间 $I$ 上有界，意味着存在常数 $M > 0$，使得对任意 $x \in I$，均有

$$|f(x)| \leq M.$$

因此，“无界”就是上述命题的否定，即：

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in I, \text{使得} |f(x_0)| > M.$$

这说明在处理数学定义时，往往需要准确完成量词转换与命题否定。

## 5.4 练习建议

写出数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的 $\varepsilon$-$N$ 定义，并写出它的否定形式。

# 6 模块五数学符号的识读和书写

## 6.1 学习提示

数学学习不仅要求“会算”，也要求“会读、会写、会表达”。若不能正确识别数学符号和希腊字母，就容易在听课、记笔记和阅读教材时出现理解障碍。因此，符号识读能力是新生适应大学数学课程的重要基础。

## 6.2 基础内容

- **常见希腊字母**：$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \theta, \lambda, \mu, \pi, \rho, \sigma, \phi, \omega, \xi, \eta, \zeta, \chi, \psi$；
- **微积分常见符号**：
  - $\lim$（极限），$\dfrac{dy}{dx}$（导数），$\partial$（偏导符号）；
  - $\int$（积分），$\iint$（二重积分），$\nabla$（Nabla 算子）；
  - $\sum$（求和），$\prod$（求积）；
- **逻辑符号**：$\forall$（任意），$\exists$（存在），$\Rightarrow$（推出），$\Leftrightarrow$（等价）；
- **书写规范**：注意区分 $\xi$ 与 $\zeta$、$\alpha$ 与 $a$、$\eta$ 与 $n$ 等易混记号。

## 6.3 例题分析

朗读并解释公式：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

可读作：“$z$ 对 $x$ 与 $y$ 的二阶混合偏导数，与先对 $x$ 后对 $y$、先对 $y$ 后对 $x$ 的求导结果相同。”

更严格地说：**若函数在某邻域内二阶混合偏导数连续，则混合偏导次序可以交换**。这也是学习数学时需要关注“结论成立条件”的典型例子。

## 6.4 练习建议

任选一段教材或论文中的公式，自行尝试朗读并解释其中符号含义；对于不会识读的记号，应及时查阅教材附录或相关资料。

# 7 模块六严谨的数学表达

## 7.1 学习提示

高中阶段的数学训练往往更强调“做出结果”；而大学数学更强调“写出过程、说明依据、保证逻辑完整”。结论正确只是基础，论证规范与表达严谨同样重要。

## 7.2 基础内容

- **证明的基本结构**：已知、求证、证明过程；
- **常见证明方法**：直接证明法、反证法、数学归纳法、构造法；
- **定理引用规范**：引用定理时，应明确指出所使用的结论及其适用条件，例如“由拉格朗日中值定理可知……”。

## 7.3 例题分析

证明：若函数 $f(x)$ 可导且为偶函数，则其导函数 $f'(x)$ 为奇函数。

**证明：**

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以对任意 $x$，有

$$f(-x) = f(x).$$

两边同时对 $x$ 求导，左边由链式法则得

$$[f(-x)]' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

右边求导得

$$[f(x)]' = f'(x).$$

故有

$$-f'(-x) = f'(x),$$

即

$$f'(-x) = -f'(x).$$

因此，$f'(x)$ 为奇函数。证毕。

## 7.4 练习建议

证明：若函数 $f(x)$ 可导且为奇函数，则其导函数 $f'(x)$ 为偶函数。写证明时，注意每一步均给出相应依据。

# 8 模块七思维方式的转变

## 8.1 学习提示

从高中到大学，数学学习最重要的变化之一在于思维方式的转变：从关注单个题目的解法，逐渐转向关注概念、结构、条件与一般性结论。适应这种变化，有助于真正理解大学数学的学习逻辑。

## 8.2 基础内容

- **从静态到动态**：高中数学常关注“某点取值”，大学数学更重视“变化率”与“累积量”；
- **从有限到无限**：极限、级数、积分等内容都体现了“无限逼近”的思想；
- **从特殊到一般**：大学数学更注重从具体问题中提炼一般规律。

## 8.3 例题分析

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$。证明：存在 $p \in [0,1]$，使得

$$f(p) = 1 - p.$$

**证明思路：**

令

$$g(x) = f(x) + x - 1.$$

则有

$$g(0) = f(0) + 0 - 1 = -1 < 0,$$

$$g(1) = f(1) + 1 - 1 = 1 > 0.$$

由于 $f(x)$ 连续，故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。根据零点定理，存在 $p \in (0,1)$，使得

$$g(p) = 0.$$

于是

$$f(p) + p - 1 = 0,$$

即

$$f(p) = 1 - p.$$

这道题体现了大学数学中从“直接求解”转向“证明存在性”的典型思路。

## 8.4 练习建议

证明方程

$$x = e^{x-2}$$

在区间 $(0,2)$ 内至少有一个实根。提示：可构造函数 $h(x) = x - e^{x-2}$ 并结合零点定理加以说明。

# 9 模块八补充基础知识

## 9.1 学习提示

除微积分与高等代数外，大学数学学习还常常需要一定的极坐标、向量、复数与计数原理基础。这些内容虽然未必在一次讲座中系统展开，但它们在后续课程与竞赛学习中具有重要支撑作用。

## 9.2 基础内容

· **极坐标**：

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

· **向量与空间解析几何**：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\vec{n};$$

· **复数表示**：

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta};$$

· **计数原理**：

– 加法原理与乘法原理；

– 排列：$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$；

– 组合：$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

## 9.3 例题分析

1. 将极坐标方程 $r=4\sin\theta$ 化为直角坐标方程；
2. 已知向量 $\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(2,-1,1)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$；
3. 计算 $C_5^2$ 和 $A_5^3$。

**解题要点：**

· 第 1 题由 $r=4\sin\theta$ 两边同乘 $r$，得

$$r^2=4r\sin\theta,$$

即

$$x^2+y^2=4y,$$

配方得

$$x^2+(y-2)^2=4,$$

表示圆心为 $(0,2)$、半径为 2 的圆。

· 第 2 题中，点乘结果为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+2\times(-1)+3\times1=3.$$

叉乘可用行列式或坐标公式计算，结果为

$$\vec{a}\times\vec{b}=(5,5,-5).$$

· 第 3 题中，

$$C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10,\qquad A_5^3=5\times4\times3=60.$$

## 9.4 练习建议

1. 将直角坐标方程 $x + y = 1$ 化为极坐标方程；
2. 求过点 $(1, 2, 3)$ 且与平面 $2x - y + z = 0$ 平行的平面方程；
3. 求复数 $1 + i$ 的三角形式与指数形式。

# 10 结语

大学数学学习的关键，不仅在于掌握若干计算技巧，更在于建立系统的知识框架、规范的表达方式和适合自己的学习节奏。希望本资料能够帮助同学们更好地完成从高中到大学的数学学习过渡，在后续课程学习中逐步形成扎实的数学基础与严谨的思维习惯。

如需进一步学习，建议结合同步教材、课堂笔记和习题训练持续巩固，也欢迎关注大学生数学协会后续开展的学习交流活动。